

CONVECTION NATURELLE DANS UNE BOÎTE RECTANGULAIRE LÉGÈREMENT INCLINÉE CONTENANT UN MILIEU POREUX

JEAN-PAUL WALCH et BERNARD DULIEU

Laboratoire de Thermodynamique des Milieux Ioniques et Biologiques, Université Paris VII,
 tour 33-43 E2, 2 place Jussieu - 75221 Paris Cedex 05, France

(Reçu le 12 Mars 1979)

Résumé - Nous étudions la convection stationnaire dans une boîte rectangulaire légèrement inclinée contenant un milieu poreux saturé. Lorsque la paroi inférieure est la plus chaude, et pour de grands facteurs de forme, la circulation est simple tant que le nombre de Rayleigh reste sous-critique. Si le système est chauffé par le haut, un régime de couches limites s'établit aux grands nombres de Rayleigh. Le nombre de Nusselt est calculé par la méthode de Galerkin et l'on montre qu'il est donné dans ce cas par l'expression approchée:

$$Nu = 1 + 0,16 k^{3/2} Ra^{*1/4} \phi^2.$$

NOMENCLATURE

- a , coefficient du développement du nombre de Nusselt;
- g , accélération de la pesanteur;
- h , demi-hauteur;
- k , facteur de forme = longueur/hauteur;
- Nu , nombre de Nusselt global;
- p , pression;
- Ra^* , nombre de Rayleigh de filtration;
- T , température réduite;
- T_0 , température de référence;
- T_1 , température à l'ordre 1 en ϕ ;
- T_B , température de la paroi inférieure;
- T_H , température de la paroi supérieure;
- v , vitesse de filtration;
- x , coordonnée quasi-horizontale;
- y , coordonnée quasi-verticale.

Symboles grecs

- α , coefficient de dilatation thermique;
- β , écart de température;
- δ , épaisseur de la couche limite;
- ϵ , = $\beta/|\beta|$ sens du chauffage;
- κ , perméabilité du milieu poreux;
- ϕ , angle d'inclinaison;
- Φ , flux de chaleur;
- ψ , fonction de courant réduite;
- ψ_1 , fonction de courant au premier ordre;
- λ^* , conductivité thermique équivalente du milieu poreux;
- ρ_f , masse volumique du fluide saturant;
- ρ_{0f} , masse volumique du fluide à la température de référence;
- $(\rho c)_f$, chaleur volumique du fluide saturant;
- θ , température absolue;
- ν , viscosité cinématique.

1. INTRODUCTION

IL PEUT être nécessaire, dans certaines circonstances, de connaître le flux de chaleur à travers un milieu

poreux à faces parallèles légèrement inclinées. C'est le cas, par exemple, lorsqu'on isole thermiquement au moyen de laine de verre la face inférieure d'un récipient chaud présentant un défaut d'horizontalité. Comme dans le cas d'un liquide pur [1, 2] les équations de la convection peuvent être linéarisées par rapport à l'angle d'inclinaison. On obtient alors par la méthode de Galerkin, les lignes de courant, le champ de température et le nombre de Nusselt. Pour les grands nombres de Rayleigh, une réduction à des équations différentielles ordinaires fournit une solution analytique compacte approchée.

2. LES ÉQUATIONS ET LEUR SOLUTION

Le système de référence est donné par la Fig. 1. Les deux parois quasi-horizontales sont maintenues à des températures différentes et uniformes T_H en haut et T_B en bas. Les parois latérales sont adiabatiques. Les différents coefficients de transport sont considérés comme indépendants de la température.

Nous utilisons la loi de Darcy qui s'écrit, en régime stationnaire:

$$\mathbf{v} = \frac{\kappa}{\nu} \left(-\frac{1}{\rho_f} \nabla p + \mathbf{g} \right) \quad (1)$$

et l'équation d'état:

$$\rho_f = \rho_{0f} [1 - \alpha(\theta - T_0)]. \quad (2)$$

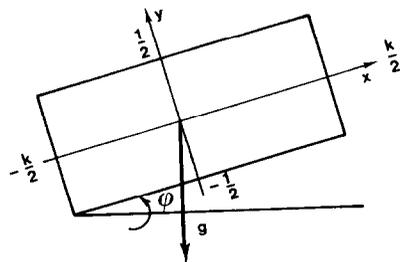


FIG. 1. Système de référence.

L'approximation de Boussinesq est adoptée : les variations de la masse volumique sont négligées sauf dans le terme générateur de la convection. L'équation (1) devient ainsi

$$\frac{1}{\rho_0 f} \nabla \mathbf{p} + \alpha \theta \mathbf{g} + \frac{\nu}{\kappa} \mathbf{v} = 0. \quad (3)$$

Pour éliminer la variable p on prend le rotationnel de (3).

On passe à des équations adimensionnelles en faisant le choix d'unités suivant :

$2h$ pour les longueurs, $\beta = T_H - T_B$ pour les températures et $\chi^* = \lambda^*/(\rho c)_f$ pour la fonction de courant.

Alors (3) s'écrit :

$$\Delta \psi = Ra^* \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial y} T - \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} T \right) \quad (4)$$

et l'équation de la chaleur prend la forme

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} \psi \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \psi \frac{\partial}{\partial y} \right) T = \Delta T \quad (5)$$

avec

$$Ra^* = \frac{2\alpha g(\rho c)_f \beta h \kappa}{\nu \lambda^*} \quad (6)$$

et pour conditions aux limites

$$\psi \left(\pm \frac{k}{2}, y \right) = \psi \left(x, \pm \frac{1}{2} \right) = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} T \left(\pm \frac{k}{2}, y \right) = 0, \quad T \left(x, \pm \frac{1}{2} \right) = \pm \frac{\varepsilon}{2}$$

avec $\varepsilon = \beta/|\beta|$ et pour origine des températures ($T_H - T_B$)/2.

Pour une inclinaison nulle, le système (4)–(7) admet la solution $\psi_0 = 0$, $T_0 = \varepsilon y$.

On suppose que pour une inclinaison assez faible il existe un développement en série de puissances de l'angle :

$$\psi(x, y) = \varphi \psi_1(x, y) + \varphi^2 \psi_2(x, y) + O(\varphi^3) \quad (8)$$

$$T(x, y) = \varepsilon y + \varphi T_1(x, y) + \varphi^2 T_2(x, y) + O(\varphi^3).$$

On obtient alors au premier ordre en φ le système

$$\frac{1}{Ra^*} \Delta \psi_1 + \frac{\partial}{\partial x} T_1 = \varepsilon \quad (9)$$

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \psi_1 + \Delta T_1 = 0 \quad (10)$$

avec les conditions aux limites

$$\psi_1 \left(\pm \frac{k}{2}, y \right) = \psi_1 \left(x, \pm \frac{1}{2} \right) = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} T_1 \left(\pm \frac{k}{2}, y \right) = 0, \quad T_1 \left(x, \pm \frac{1}{2} \right) = 0.$$

ψ_1 et T_1 dépendent du nombre de Rayleigh et du facteur de forme k .

Le nombre de Nusselt global, mesurant la contribution convective au transport de chaleur s'écrit ici :

$$Nu(k, Ra^*, \varphi) = \frac{\Phi(\varphi)}{\Phi(0)} \quad (12)$$

où $\Phi(\varphi)$ est le flux de chaleur à travers une section quasi-horizontale de la boîte.

Développons Φ en puissances de l'angle : par raison de symétrie, Φ est une fonction paire de φ et l'on a [2, 3]

$$Nu(k, Ra^*, \varphi) = 1 + \frac{\varphi^2}{4k} \iint (\nabla \mathbf{T}_1)^2 dx dy + O(\varphi^4). \quad (13)$$

Le système (9)–(11) est résolu par la méthode de Galerkin en posant :

$$T_1(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m T_{ij} \sin \frac{i^* x}{k} \cos j^* y \quad (14)$$

$$\varphi_1(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m L_{ij} \cos \frac{i^* x}{k} \cos j^* y$$

où $i^* = (2i^* - 1)\pi$ et $j^* = (2j - 1)\pi$.

On obtient

$$L_{ij} = \frac{-\varepsilon 4k(-1)^{i+j}}{i^* j^* \left[\frac{k}{Ra^*} \Omega_{ij} + \frac{\varepsilon i^{*2}}{k \Omega_{ij}} \right]} \quad (15)$$

$$T_{ij} = -\frac{\varepsilon i^*}{k \Omega_{ij}} L_{ij} \text{ avec } \Omega_{ij} = \frac{j^{*2}}{k^2} + j^{*2}.$$

Pour les calculs numériques nous utilisons $n = 10$, $m = 40$.

3. RÉSULTATS ET COMMENTAIRES

(a) Chauffage par le bas ($\varepsilon = -1$) et nombre de Rayleigh sous-critique ($Ra^* \cos \varphi < 4\pi^2$, [4]). On obtient les lignes de courant de la Fig. 2. Pour des valeurs assez grandes du facteur de forme nous distinguons deux régions : loin des parois adiabatiques la chaleur n'est transportée que par diffusion et la fonction de courant est donnée par la solution bien connue [4]

$$\psi_1 \sim \frac{Ra^*}{2} \left(\frac{1}{4} - y^2 \right) \quad (16)$$

$$T_1 \sim 0$$

obtenue en faisant $\partial/\partial x \rightarrow 0$ dans (9)–(11).

Par contre, un transport convectif s'établit au voisinage des parois latérales. Comme (16) est indépendante du facteur de forme, il doit en être de même pour ψ_1 et T_1 près des extrémités et on peut écrire le nombre de Nusselt sous la forme

$$Nu = 1 + a(k, Ra^*) \varphi^2 + O(\varphi^4) \quad (17)$$

où $a(k, Ra^*)$ est de la forme $b(Ra^*)/k$. La validité de

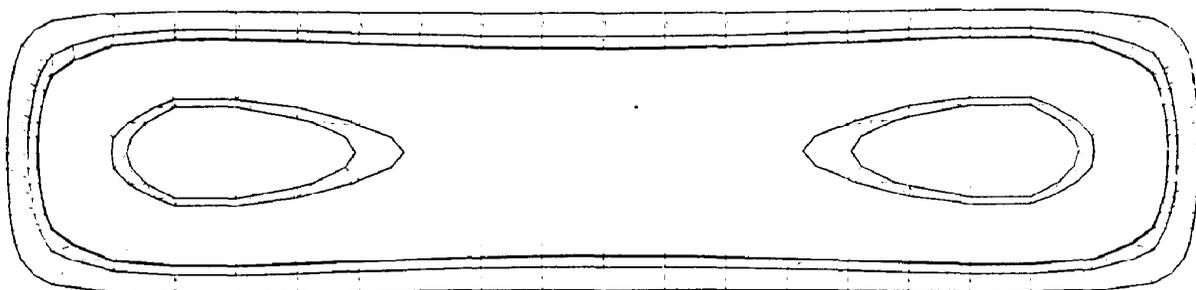


FIG. 2. Lignes de courant au premier ordre pour $\varepsilon = -1, k = 8$ et $Ra^* = 20$.

cette expression peut être appréciée sur la Fig. 3 où l'on donne la relation entre a et k .

(b) Chauffage par le haut ($\varepsilon = +1$). Lorsque le nombre de Rayleigh est petit, la convection est unicellulaire (Fig. 4). Pour les grands nombres de Rayleigh on distingue deux régions (Fig. 5): dans le centre, les vitesses sont faibles et la perturbation de température indépendante de y (il y a stratification horizontale). Près des parois les gradients sont très forts. Nous reviendrons sur ce cas au paragraphe 4.

La Fig. 6 donne le coefficient $a(k, Ra^*)$ du développement du nombre de Nusselt

$$Nu = 1 + a(k, Ra^*)\varphi^2. \quad (18)$$

On distingue là encore deux domaines: celui des petits nombres de Rayleigh où a croît rapidement avec Ra^* mais décroît avec k [Cf. équation (17)] et celui où Ra^* est grand pour lequel la stratification de la région centrale donne une croissance plus faible avec Ra^* .

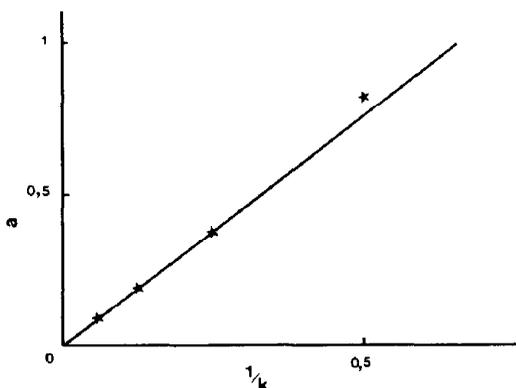


FIG. 3. Nombre de Nusselt $Nu = 1 + a(k, Ra^*)\varphi^2$ pour $\varepsilon = -1$ et $Ra^* = 20$.

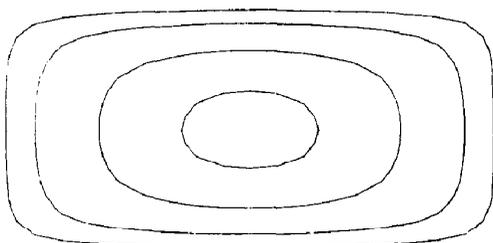


FIG. 4. Lignes de courant au premier ordre pour $\varepsilon = +1, k = 2$ et $Ra^* = 100$.

4. ANALYSE DU CAS $Ra^* \rightarrow \infty$ POUR k MODÉRÉ ($\varepsilon = +1$)

Lorsque le nombre de Rayleigh croît indéfiniment les systèmes (4)–(5) et (9)–(10) deviennent singuliers.

Le système (4)–(5) avec $\varphi = \pi/2$, correspondant à une boîte verticale, a été étudié pour le cas d'un liquide pur [5–6] et d'un milieu poreux [7–8]. On distingue alors un coeur où le terme diffusif de l'équation du mouvement est négligé et une couche limite proche des parois isothermes où les équations sont simplifiées par les procédures habituelles. Les deux solutions sont ensuite raccordées.

Ici, dans le cas $\varphi \rightarrow 0$, nous utilisons une méthode de réduction des équations complètes (9)–(10) à un système d'équations différentielles ordinaires proche de la méthode de Kantorovich [9].

Une analyse grossière [2, 3] donne pour les ordres de grandeur des variables les estimations suivantes: épaisseur de la couche limite $\delta \sim k^{1/2} Ra^{*-1/4}$; fonction de courant près des parois isothermes $\psi \sim k Ra^{*1/2} \varphi$; nombre de Nusselt $Nu - 1 \sim k^{3/2} Ra^{*1/4} \varphi^2$.

Développons T_1 et ψ_1 en séries de fonctions satisfaisant aux symétries et aux conditions aux limites en x :

$$T_1(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} T_i(y) \sin \alpha_i x \quad (19)$$

$$\psi_1(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} L_i(y) \cos \alpha_i x$$

avec $\alpha_i = (2^i - 1) \frac{\pi}{k}$.

En substituant ce développement dans (9)–(10) compte tenu de

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 \cos \alpha_i x, \quad \alpha_i^2 = -\frac{4(-1)^i}{\pi(2i-1)} \quad (20)$$

et en utilisant la condition de Galerkin, on obtient le système découplé

$$T_i^{(IV)}(y) - 2\alpha_i^2 T_i''(y) + \alpha_i^2 [\alpha_i^2 + Ra^*] T_i(y) = Ra^* \alpha_i^2 \alpha_i \quad (21)$$

$$L_i^{(IV)}(y) - 2\alpha_i^2 L_i''(y) + \alpha_i^2 [\alpha_i^2 + Ra^*] L_i(y) = -Ra^* \alpha_i^2 \alpha_i^2$$

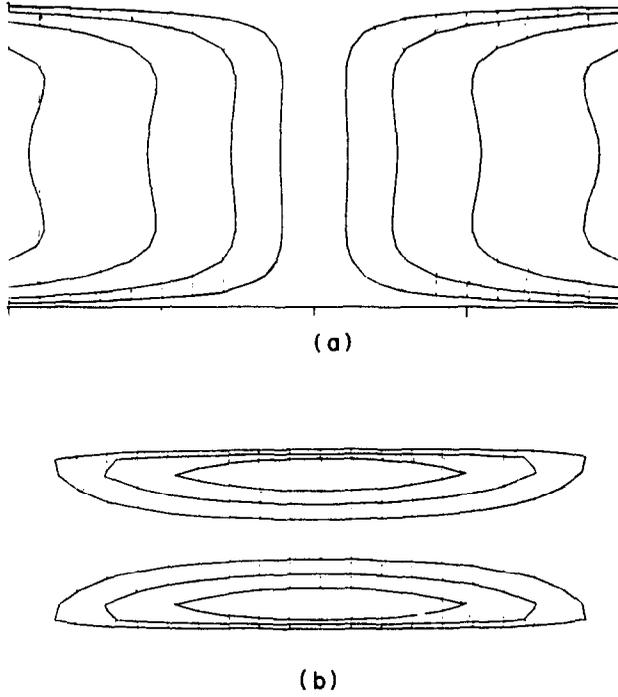


FIG. 5. Isothermes (a) et lignes de courant (b) au premier ordre pour $\varepsilon = +1$, $k = 2$ et $Ra^* = 10^4$.

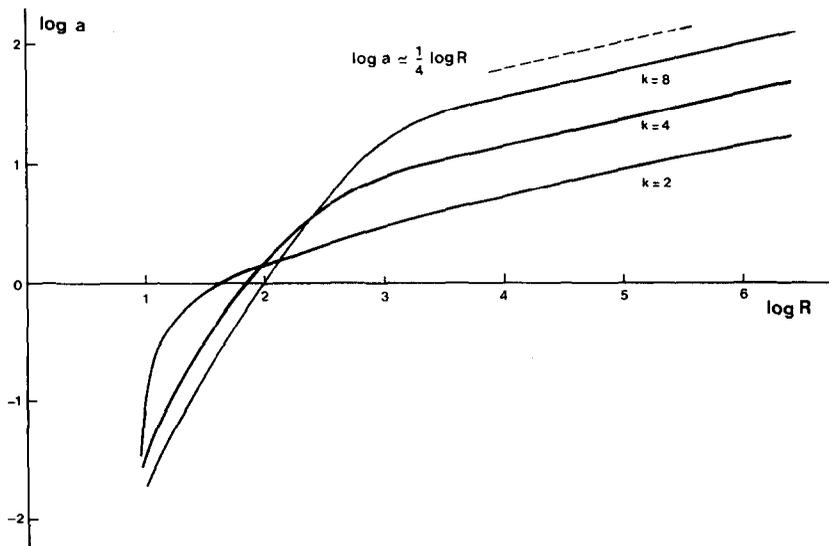


FIG. 6. Nombre de Nusselt $Nu = 1 + a(k, Ra^*)\phi^2$ pour $\varepsilon = +1$.

Les racines de l'équation caractéristique associée à (21) sont

$$r_i = \pm \alpha_i [1 \pm j(Ra^*/\alpha_i^2)^{1/2}]^{1/2} \quad (22)$$

Il est possible de développer entièrement le calcul sans approximation et d'obtenir ainsi une solution exacte sous forme de séries simples (19). Cependant les coefficients assez compliqués font que cette solution n'est, pratiquement, pas beaucoup plus utilisable que la solution en séries doubles obtenue au paragraphe 2.

Limitons-nous au cas où $(Ra^*/\alpha_i^2)^{1/2} \gg 1$, c'est-à-dire

$$\frac{kRa^{*1/2}}{(2i-1)\pi} \gg 1 \quad (23)$$

ce qui revient, comme on peut le vérifier, à faire l'approximation

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2}{\partial x^2} \text{ dans (9)-(10).}$$

En choisissant les solutions paires de (21) satisfaisant aux conditions aux limites et compte tenu de (23), il vient

$$T_1(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[A_i \sinh m_i y \sin m_i y + B_i \cosh m_i y \cos m_i y + \frac{\alpha_i}{\alpha_i} \right] \sin \alpha_i x$$

$$\psi_1(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[-Ra^{*1/2} B_i \sinh m_i y \sin m_i y + Ra^{*1/2} A_i \cosh m_i y \cos m_i y \right] \cos \alpha_i x$$

avec

$$A_i \simeq -\frac{2\alpha'_i}{\alpha_i} e^{-\frac{m_i}{2}} \sin \frac{m_i}{2} \quad (24)$$

$$B_i \simeq -\frac{2\alpha'_i}{\alpha_i} e^{-\frac{m_i}{2}} \cos \frac{m_i}{2}$$

et

$$m_i = \left[\frac{\alpha_i}{2} \right]^{1/2} Ra^{*1/4}$$

Sur la Fig. 7 est porté $T_1(0,5; y)$ et $\psi_1(0; y)$ pour $Ra^* = 10^4$ et 10^5 et $k = 2$ en ne gardant que le premier terme des séries.

Compte tenu de (13) et négligeant les composantes horizontales du gradient de température, on obtient pour le nombre de Nusselt

$$Nu \simeq 1 + \frac{12}{\pi^{7/2} \sqrt{2}} k^{3/2} Ra^{*1/4} \varphi^2 \times \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^{7/2}} \quad (25)$$

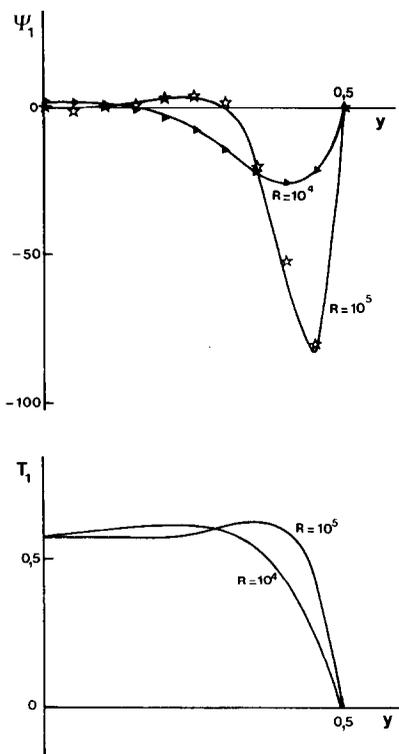


FIG. 7. Fonction de courant et champ de température pour $k = 2$, $Ra^* = 10^4$ et $Ra^* = 10^5$ selon (24) en traits pleins et (14)-(15): triangles et étoiles.

5. CONDITIONS DE VALIDITÉ ET CONCLUSION

En utilisant les estimations indiquées au début du paragraphe 4 il est possible de préciser les conditions de validité des solutions ci-dessus.

L'utilisation de la loi de Darcy suppose que les variations des vitesses soient faibles sur une longueur caractéristique des dimensions des pores (d):

$$\delta \sim k^{1/2} Ra^{*-1/4} \gg \frac{2d}{h}$$

Par ailleurs, les termes du second ordre en φ ne sont négligeables dans la couche limite que si

$$\tan \varphi \ll \frac{\delta}{k} \sim k^{-2/3} Ra^{*-1/6}$$

Lorsque la boîte est chauffée par le bas et pour des nombres de Rayleigh sous-critiques, la solution habituelle consistant en un écoulement parallèle aux parois isothermes et un transport de chaleur convectif limité aux extrémités est utilisable dans le cas de facteurs de forme assez grands.

Pour une chauffage par le haut, l'écoulement est d'autant plus complexe que Ra^* est grand. La solution analytique obtenue pour $Ra^* \rightarrow \infty$ en souligne les aspects essentiels: couches limites au voisinage des parois isothermes, nappes de circulation inversée et région centrale stratifiée presque immobile.

RÉFÉRENCES

1. J. E. Hart, A note on the structure of thermal convection in a slightly slanted slot, *Int. J. Heat Mass Transfer* **16**, 747–753 (1977).
2. B. Dulieu, M. L. Bonniaud et J. P. Walch, Convection naturelle dans une enceinte rectangulaire presque horizontale chauffée par le haut, *Int. J. Heat Mass Transfer* **22**, 739–747 (1979).
3. J. P. Walch, Convection naturelle dans une boîte rectangulaire remplie d'un milieu poreux saturé, chauffée par le haut et légèrement inclinée, Rapport de DEA, Paris (1978).
4. S. A. Borjes, M. A. Combarous, Natural convection in a sloping porous layer, *J. Fluid Mech.* **57**, 63–79 (1973).
5. J. W. Elder, Laminar free convection in a vertical slot, *J. Fluid. Mech.* **23**, 77–98 (1965).
6. A. E. Gill, The boundary layer regime for convection in a rectangular cavity, *J. Fluid Mech.* **26**, 515–536 (1966).
7. J. E. Weber, The boundary layer regime for convection in a vertical porous layer, *Int. J. Heat Mass Transfer* **18**, 569 (1975).
8. K. L. Walker et G. M. Homsy, Convection in a porous cavity, *J. Fluid Mech.* **87**, 449–474 (1978).
9. B. A. Finlayson, *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, p. 20. Academic Press, New York (1972).

NATURAL CONVECTION IN A SLIGHTLY SLANTED RECTANGULAR BOX FILLED WITH A POROUS MEDIUM

Abstract—Steady natural convection in a rectangular slightly inclined box filled with a porous medium is studied. If the lower plate is heated and the aspect ratio large, the structure of the flow is simple as long as the Rayleigh number remains sub-critical. If the upper plate is heated, a boundary layer regime appears provided that the Rayleigh number is high. The Nusselt number is calculated by the Galerkin method and shown to approximate in this particular case to the following expression:

$$Nu = 1 + 0.16k^{3/2}Ra^{*1/4}\varphi^2.$$

FREIE KONVEKTION IN EINEM LEICHT SCHRÄG GESTELLTEN, RECHTECKIGEN KASTEN, DER MIT EINEM PORÖSON MEDIUM GEFÜLLT IST

Zusammenfassung – Wir untersuchen freie Konvektion in einem rechteckigen, leicht geneigten Kasten, der mit einem porösen Medium gefüllt ist. Wenn die untere Seite geheizt wird und das Seitenverhältnis groß ist, so ist die Struktur der Strömung solange einfach, wie die Rayleigh-Zahl unterkritisch bleibt. Wenn die obere Seite geheizt wird, ergibt sich eine Grenzschichtströmung, vorausgesetzt, daß die Rayleigh-Zahl hoch ist. Wir berechnen die Nusselt-Zahl nach der Methode von Galerkin und zeigen, daß sie in diesem besonderen Fall von dem Ausdruck

$$Nu = 1 + 0,16k^{3/2}Ra^{*1/4}\varphi^2$$

angenähert wird.

ЕСТЕСТВЕННАЯ КОНВЕКЦИЯ В СЛЕГКА НАКЛОНЕННОМ ПРЯМОУГОЛЬНОМ ОБЪЁМЕ, ЗАПОЛНЕННОМ ПОРИСТОЙ СРЕДОЙ

Аннотация — Изучается стационарная естественная конвекция в прямоугольном слегка наклоненном объёме, заполненном пористой средой. Если нагревается нижняя пластина и отношение сторон велико, структура потока остается простой вплоть до критических чисел Рейля. При нагреве верхней пластины в случае больших чисел Рейля возникает течение типа пограничного слоя. Методом Галеркина рассчитано число Нуссельта и показано, что в рассмотренном случае оно определяется выражением

$$Nu = 1 + 0,16k^{3/2}Ra^{*1/4}\varphi^2.$$